République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure d'Oran (ENSO)

Département de Sciences Exactes

Polycopié

Cinématique et dynamique du point matériel (Cours et exercices corrigés)

Destiné aux étudiants de 1ière année Sciences Exactes

PEM et PES

Rédigé par : **Dr. BOUKLI-HACENE Nassima**

Maître de conférences classe « B », ENSO

Année Universitaire : 2018/2019

Table des matières

Introduction

Ce polycopié présente des cours sur la cinématique et la dynamique du point matériel et quelques exercices. Il est destiné aux étudiants de la première année professeur d'enseignement moyen et secondaire sciences exactes de l'école normale supérieure.
La cinématique et la dynamique du point est une partie du module de la mécanique du point matériel. Il s'agit d'étudier le mouvement des corps matériels en fonction du temps (la cinématique), et étudier les forces qui provoquent ou modifient leur mouvement (la dynamique).

Ce manuscrit est subdivisé comme suit :

La première partie est consacrée à un rappel mathématique sur l'analyse vectorielle qui est nécessaire pour exprimer les lois physiques. Nous déterminons la notion de vecteur, ensuite nous montrons les opérations sur les vecteurs : la somme, la soustraction et le produit des vecteurs et nous terminons cette partie par les opérateurs différentiels (opérateur nabla, gradient, divergent, rotationnel et le laplacien).

La deuxième partie est destinée à la cinématique du point matériel. Nous présentons l'étude descriptive du mouvement d'un point en déterminant le vecteur position, déplacement, vitesse et le vecteur accélération. Ensuite, nous étudions les différents types de mouvement et les différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques). Nous terminons cette partie par l'étude du mouvement relatif. Il s'agit d'étudier le mouvement d'un point par rapport à un repère en mouvement (repère mobile). Nous abordons le cas d'un repère en mouvement de translation et le cas d'un repère en mouvement de rotation.

La troisième partie de ce polycopié est consacrée à la dynamique du point matériel. Nous introduisons la notion de forces, la masse et le principe d'inertie. Nous présentons ensuite les trois lois de Newton de la dynamique et nous étudions les différentes forces (forces de contact, forces de frottement, forces élastiques et les forces d'inertie). Nous terminons cette partie par déterminer le moment cinétique et les forces centrales.

À la fin de ce polycopié, nous proposons quelques exercices corrigés.

II. Calcul vectoriel

1. Introduction :

On classe les grandeurs physiques suivant deux catégories : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

Une **grandeur scalaire** est une valeur numérique réelle utilisée pour représenter certaines quantités telles que : la masse, le temps, la température…

Une **grandeur vectorielle** est une grandeur qui a une valeur numérique réelle et une direction telle que : la vitesse, l'accélération, la force, …

On représente une grandeur vectorielle par ce qu'on appelle un vecteur. Figure 1

Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- L'origine (A)
- Le support (la droite (AB))
- La direction ou le sens du vecteur (de A vers B)
- Le module ou la norme du vecteur : valeur numérique réelle qui représente la longueur du vecteur (la distance entre A et B)

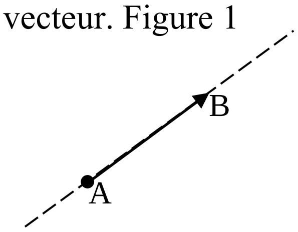


***Figure 1** : Vecteur* $\overrightarrow{AB}$

Le module d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit comme suit : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$= AB

2. Le vecteur unitaire :

Le vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1. On exprime un vecteur $\overrightarrow{AB}$ parallèle au vecteur unitaire $\vec{U}$ tel que :

$$\overrightarrow{AB} = AB\,\vec{U}$$

Avec $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$ et $\left\|\vec{U}\right\| = 1$

3. Composantes d'un vecteur :

Un vecteur est décrit par ces composantes qui sont déterminées à partir d'un repère. Ce repère peut être linéaire (une seule composante x), plan (deux composantes) ou dans l'espace (trois composantes).

- <u>*Cordonnées d'un vecteur dans le repère cartésien*</u>

Le repère cartésien est un repère orthonormé : les vecteurs unitaires doivent être orthogonaux entre eux et normés à l'unité.

- **Dans le plan (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)**

Le vecteur $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y}$$

Avec : $\overrightarrow{V_x} = V_x\,\vec{\imath}$; $\overrightarrow{V_y} = V_y\,\vec{\jmath}$

$V_x = V\cos\alpha$; $V_y = V\sin\alpha$

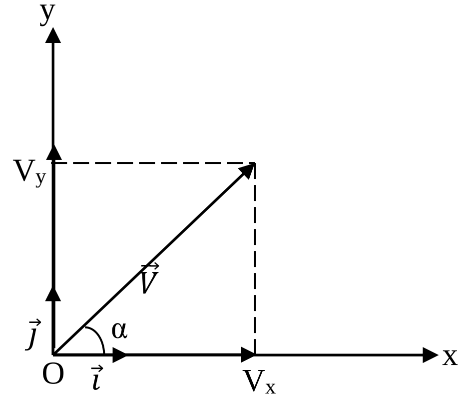


***Figure 2** : Projection d'un vecteur dans le plan (O,* $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$*)*

Les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans le plan orthonormé (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) sont : V_x et V_y et on écrit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\cos\alpha \\ V\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$\vec{V} = V(\cos\alpha\ \vec{\imath} + \sin\alpha\ \vec{\jmath})$$

Le module du vecteur $\vec{V}$ est calculé à partir de ses cordonnées comme suit :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

- **Dans l'espace (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$)**

Le vecteur $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

Avec : $\vec{V_x} = V_x\,\vec{\imath}$; $\vec{V_y} = V_y\,\vec{\jmath}$; $\vec{V_z} = V_z\,\vec{k}$

$V_x = V\cos\alpha$
$V_y = V\cos\beta$
$V_z = V\cos\theta$

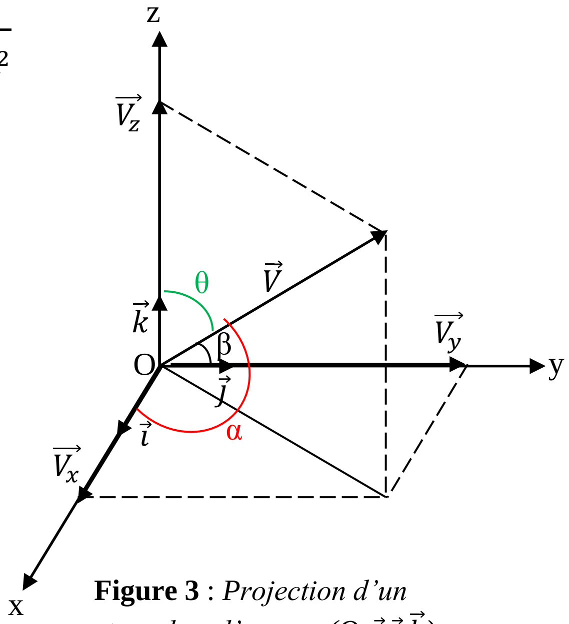


Figure 3 : *Projection d'un vecteur dans l'espace (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$)*

Les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans l'espace (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) sont : V_x , V_y et V_z.
Le module du vecteur $\vec{V}$ est donné comme suit :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

4. Les opérations sur les vecteurs :

- *La somme des vecteurs*

Soit deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ tel que :

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La somme de deux vecteurs est un autre vecteur $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

$$\vec{S} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_2 + y_2)\vec{\jmath}$$

Le module de $\vec{S}$ est calculé comme suit :

$$S = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

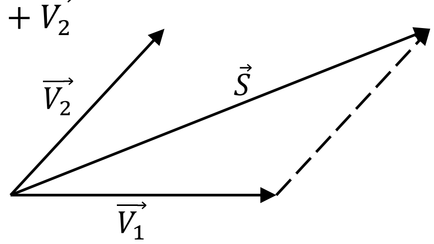


***Figure 4** : Somme de deux vecteurs*

Ou par les lois des cosinus : $S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})}$

- *La soustraction des vecteurs*

La soustraction de deux vecteurs est un vecteur $\vec{D} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ que l'on peut définir comme étant la somme du vecteur $\overrightarrow{V_1}$ avec l'inverse du vecteur $\overrightarrow{V_2}$:

$$\vec{D} = \overrightarrow{V_1} + (-\overrightarrow{V_2})$$
$$\vec{D} = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_2 - y_2)\vec{\jmath}$$

On obtient le module de $\vec{D}$ comme suit :

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ou

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})}$$

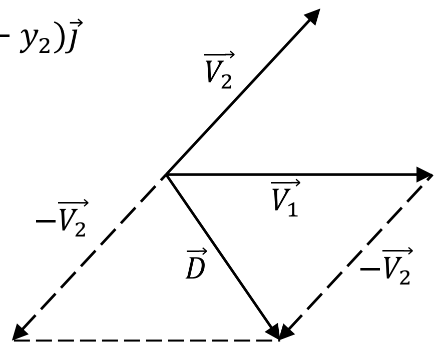


Figure 5 *: Soustraction de deux vecteurs*

- *Le produit scalaire entre deux vecteurs*

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ donne une valeur scalaire.

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = V_1V_2\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$$

Si $\overrightarrow{V_1}$ est parallèle à $\overrightarrow{V_2}$, donc cos $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ = 0 et le produit scalaire est nul $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 0$
Si $\overrightarrow{V_1}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{V_2}$, donc cos $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ = 1 et le produit scalaire $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = V_1V_2$

D'autre part :

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath})\,(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath})$$
$$\overrightarrow{V_1}\,.\overrightarrow{V_2} = x_1x_2\vec{\imath}\,\vec{\imath} + x_1y_2\vec{\imath}\,\vec{\jmath} + x_2y_1\vec{\jmath}\,\vec{\imath} + y_1y_2\vec{\jmath}\,\vec{\jmath}$$

Nous avons $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\vec{\imath} = 0$ et $\vec{\imath}\,.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\,\vec{\jmath} = 1$
D'où :

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2$$

- Propriétés du produit scalaire :

Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$
Non associatif : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{(V_2.V_3)}$ donne un vecteur
Distributif : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{(V_2 + V_3)} = (\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}) + (\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3})$

Exemple :

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$
Le produit scalaire $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 4 + 6 + 1 = 11$

➢ ***Le produit vectoriel entre deux vecteurs***

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par ces deux vecteurs.

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$$

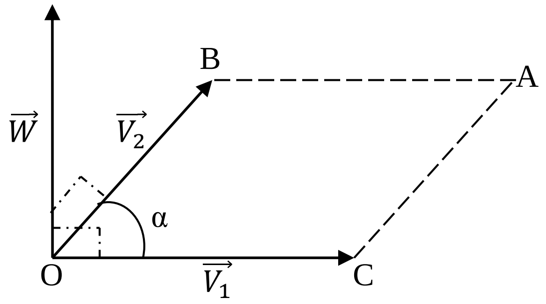
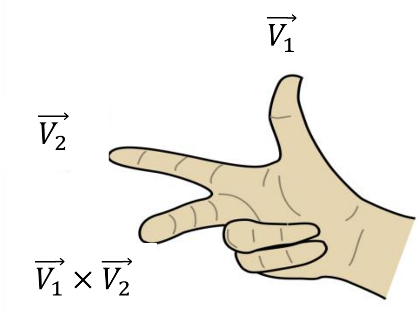


Figure 6 : Produit *vectoriel* $\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$

La direction du vecteur $\overrightarrow{W}$ est trouvée par la règle des trois doigts de la main droite.



Le module du vecteur $\overrightarrow{W}$ est calculé comme suit :

$$W = \left|\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}\right| = V_1 V_2 \sin\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$$

Le module du vecteur W représente l'aire du parallélogramme (OABC) formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}\, et\, \overrightarrow{V_2}$ (figure 6)

Le produit vectoriel peut être calculé à partir de la méthode du déterminant :
Soit deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ telle que :

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{W} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{\imath} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

À partir de cette relation, on peut calculer le module de $\overrightarrow{W}$ par :

$$W = \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2}$$

***Remarque** :*

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$
$$|\vec{\imath} \times \vec{\jmath}| = |\vec{\imath} \times \vec{k}| = |\vec{\jmath} \times \vec{k}| = 1$$
$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \qquad \vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath}, \qquad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$$

- <u>Propriétés du produit vectoriel :</u>

Non commutatif : $\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_1}$
Non associatif : $\overrightarrow{V_1} \times (\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}) \neq (\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}) \times \overrightarrow{V_3}$
Distributif : $\overrightarrow{V_1} \times (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}) + (\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_3})$

<u>Exemple :</u>
Soit deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$ est : $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{W} = (0 + 10)\vec{\imath} - (0 + 10)\vec{\jmath} + (4 - 6)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{W} = 10\,\vec{\imath} - 10\,\vec{\jmath} + (-2)\vec{k}$$

➢ *<u>Le produit mixte entre trois vecteurs</u>*

On définit le produit mixte entre trois vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} et\, \overrightarrow{V_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ par le scalaire $\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3})$ qui est calculé par la méthode du déterminant tel que :

$$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}) = (y_2z_3 - z_2y_3)x_1 - (x_2z_3 - z_2x_3)y_1 + (x_2y_3 - y_2x_3)z_1$$

<u>Exemple :</u>

Soit trois vecteurs: $\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\overrightarrow{V_2} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}) = (3.0 - (-1).2)2 - (2.0 - 0.1)y_1 + (2.2 - 2.1)(-1)$$

$$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}) = (2)2 - (0)3 + (2)(-1) = 2$$

5. Les opérateurs différentiels :

5.1. Définitions :

Une fonction à une seule variable est une fonction qui dépend d'une seule variable x : F=f(x). Si la fonction f est dérivable en tout point x, on définit F' la dérivée de la fonction f tel que $F' = \frac{df}{dx}$

Par contre, si la fonction dépend de plusieurs variables x, y, z,…, On définit ce que l'on appelle une différentielle.

Une fonction à deux variables est une fonction qui dépend de deux variables : F=f(x,y)

Une fonction à trois variables est une fonction qui dépend de trois variables x, y et z : F=f(x, y, z)

La différentielle totale d'une fonction algébrique F à trois variables x, y, z s'écrit :

$$dF = df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} et \frac{\partial f}{\partial z}$ sont des différentielles partielles.

Exemple :

$$f(x,y,z) = x^2 - 2y + 4z$$

Sa différentielle totale est :

$$df = 2xdx - 2dy + 4dz$$

Il existe des fonctions algébriques à plusieurs variables et des fonctions vectorielles à plusieurs variables

$$\vec{V} = f(x,y,z)\vec{\imath} + g(x,y,z)\vec{\jmath} + h(x,y,z)\vec{k}$$

$\vec{V}$ est une fonction vectorielle à plusieurs variables.

5.2. Les opérateurs :

- **Opérateur nabla**

L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ est un vecteur qui agit sur les fonctions comme suit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- **Le gradient**

Le gradient est un opérateur qui agit sur les fonctions algébriques et les transforme en fonctions vectorielles par l'opérateur nabla. On définit le vecteur gradient de la fonction algébrique f comme suit :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Exemple :

Soit f(x,y,z)= xyz^2.

$$\overrightarrow{grad}f = yz^2\vec{\imath} + xz^2\vec{\jmath} + 2xyz\vec{k}$$

- **Le divergent**

Le divergent est un opérateur qui agit sur les fonctions vectorielles et les transforme en fonctions algébriques par l'opérateur nabla. Il est définit comme suit :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exemple :

$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{\imath} + xyz\vec{\jmath} - xyz^2\vec{k}$

$div\,\vec{V} = 2y + xz - 2xyz$

- **Le rotationnel**

Soit un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$. On définit le rotationnel de $\vec{V}$ comme suit :

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemple :

$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{\imath} + xyz\vec{\jmath} - xyz^2\vec{k}$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & xyz & -xyz^2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = (-xz^2 - xy)\vec{\imath} - (-yz^2 - 0)\vec{\jmath} + (yz - 2x)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = (-xz^2 - xy)\vec{\imath} + yz^2\vec{\jmath} + (yz - 2x)\vec{k}$$

- **Le laplacien**

Le laplacien est définit comme étant le divergent du gradient ou le gradient du divergent

- Le laplacien d'une fonction algébrique est donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Le laplacien d'une fonction vectorielle est donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}$$

II. Cinématique du point matériel

1. Introduction :

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement des corps matériels en fonction du temps (la position, la distance parcouru, la vitesse, l'accélération…) sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement (les forces, l'énergie,…)
On suppose que le corps étudié est un point matériel. On considère que les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue.
La notion du mouvement est relative. Un corps peut être, en même temps, en mouvement par rapport à un corps et en repos par rapport à un autre. Par conséquent, il est nécessaire de définir un repère pour déterminer la position, la vitesse ou l'accélération d'un mobile à un instant correspondant à la position du mobile par rapport à ce repère.
On définit plusieurs systèmes de coordonnées selon la nature du mouvement du point matériel. Cartésien, polaire, cylindrique et sphérique.

2. Étude Descriptive du mouvement d'un point matériel :

2.1. La position du mobile :

La position d'un mobile à un instant t est déterminée par rapport à un repère par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur position. Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le mobile M. Suivant le repère cartésien dans l'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Sur la figure 7, nous montrons le vecteur position de M suivant le repère cartésien et sa trajectoire.

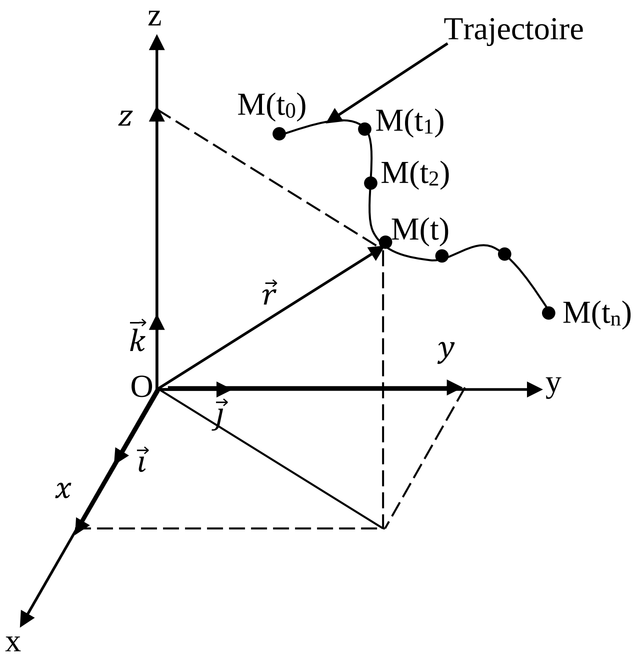


***Figure 7** : Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans les coordonnées cartésiennes*

Les composantes x, y et z du vecteur position dans la base cartésienne sont les coordonnées cartésiennes du mobile M. Ces coordonnées changent avec le temps car le mobile M est en mouvement : x(t), y(t), z(t).

Les fonctions x(t), y(t) et z(t) sont appelées les équations horaires du mouvement.

2.2. La trajectoire :

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport à un repère. C'est une ligne continue qui relie le point de départ au point d'arrivée (figure 7). La trajectoire définit la nature du mouvement. Si la trajectoire est rectiligne, le mouvement est rectiligne et si elle est curviligne le mouvement est curviligne.

- Équation de la trajectoire :

C'est la relation qui lie les coordonnées du mobile x, y, z entre eux indépendamment du temps. Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les équations horaires.

Exemple :
Les équations horaires d'un point ponctuel en mouvement dans le plan (O, x, y) sont :

$$\begin{cases} x=2t\ldots\ldots\ (1) \\ y=2t+1\ldots\ (2) \end{cases}$$

De l'équation (1), on a $t = \frac{x}{2}$. On remplace t dans l'équation (2), on aura :

$$y=2\left(\frac{x}{2}\right)+1$$

$$y=x+1$$

Cette équation de la trajectoire est l'équation d'une ligne droite de la forme y=ax+b ce qui signifie que le mouvement est rectiligne.

2.3. Le vecteur déplacement :

Pendants le mouvement, le mobile occupe des positions différentes. A l'instant t_1, il est au point M_1 et à un instant t_2, il est au point M_2 (figure). On définit le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ le vecteur de déplacement

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

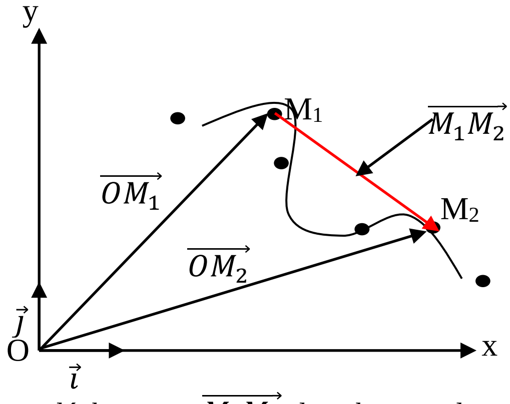


Figure 8 *: Vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ dans les coordonnées cartésiennes*

2.4. Le vecteur vitesse

- La vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la variation de la distance entre deux positions M_1, M_2 occupées par le mobile par rapport au temps écoulé entre ces deux positions. Elle est définit comme suit :

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{avec } \Delta x = x_2 - x_1$$

x_1 et x_2 sont respectivement les coordonnées de M_1, M_2. Le vecteur $\overrightarrow{v_m}$ parallèle au vecteur de déplacement.

- La vitesse instantanée

C'est la vitesse à un instant t donné et elle est définit comme suit :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est tangent à la trajectoire et sa direction suivant la direction du mouvement.

Les coordonnées du vecteur vitesse suivant les coordonnées cartésiennes sont :

Soit: $$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Donc $$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

2.5. Le vecteur accélération

- L'accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v_1 la vitesse du mobile à un instant t_1 et v_2 sa vitesse à instant t_2. Le mobile subit une accélération moyenne telle que :

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Le vecteur $\overrightarrow{a_m}$ est // à $\Delta\vec{v}$ et il se dirige vers la concavité de la trajectoire.

- L'accélération instantanée

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les coordonnées du vecteur accélération suivant les coordonnées cartésiennes sont:
Soit:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

3. Différents types de mouvements et les différents systèmes de coordonnées

3.1. Le mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne est caractérisé par une trajectoire sous forme d'une droite. Le mobile M est repéré par les coordonnées cartésiennes selon la droite Ox (si le mouvement est linéaire suivant Ox)

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath}$

➢ Le mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une vitesse constante et par conséquent l'accélération est nulle : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.

Le vecteur vitesse est : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$

D'où : $dx = v\,dt$

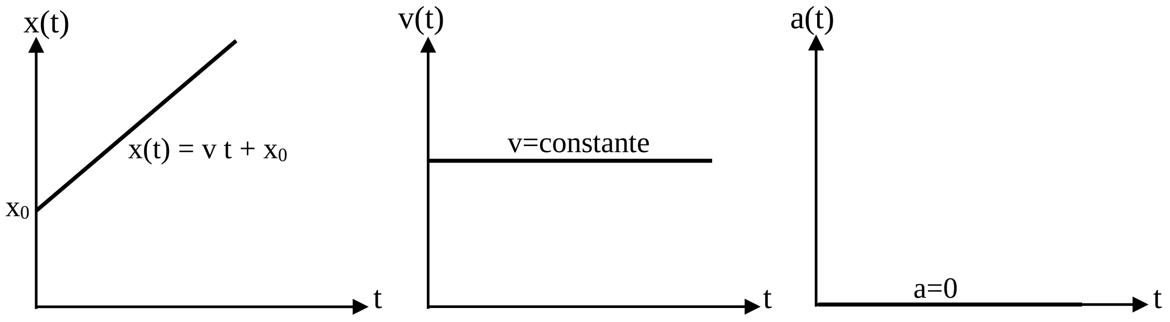
$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Avec : x_0 est l'abscisse (la position) de M à l'instant initiale t_0

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0$$

Cette équation est appelée l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme

- *Diagramme du mouvement rectiligne uniforme:*



➢ Le mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante :

$$a = \frac{dv}{dt} = constante$$

$$dv = a\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = a\int_{t_0}^{t} dt$$

Avec v_0 est la vitesse initiale à l'instant t_0

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0$$

D'autre part :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v(t)\,dt$$
$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,(t)dt = \int_{t_0}^{t} [a(t-t_0)+v_0]\,dt$$
$$x(t) = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + (v_0 - at_0)(t-t_0) + x_0$$

Si t_0=0, l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié devient :

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

Si $\vec{a}.\vec{v} > 0$, le mouvement est uniformément accéléré
Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$, le mouvement est uniformément retardé

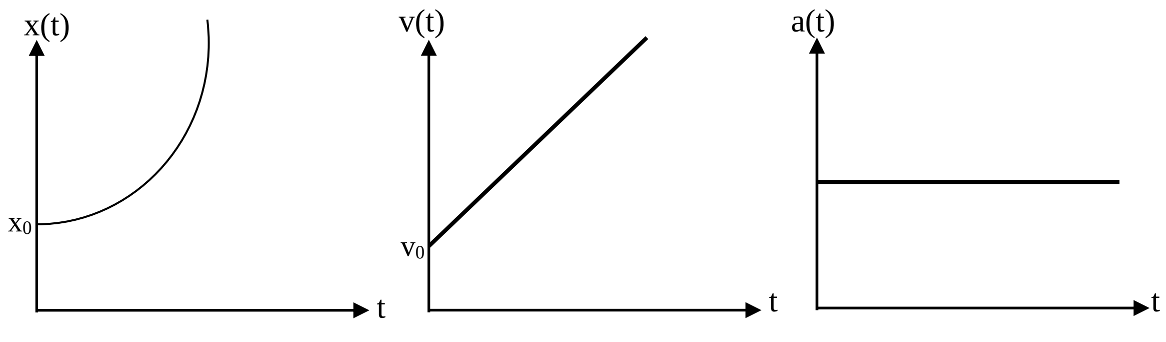
Remarque : le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante qui peut être calculé comme suit :

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$a\,dx = \frac{dv}{dt}dx$$
$$\int_{x_0}^{x_1} a\,dx = \int_{v_0}^{v_1} v\,dv$$
$$a(x_1 - x_0) = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

D'où : $$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2(x_1 - x_0)}$$

x_1 est v_1 sont respectivement la position et la vitesse de M à l'instant t_1

- *Diagramme du mouvement rectiligne uniformément varié:*



➢ **Le mouvement rectiligne varié**

Le mouvement rectiligne varié est caractérisé par une accélération qui dépend du temps.

<u>Exemple :</u>
Soit un mobile se déplace à une accélération a = 2t-1.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} (2t-1)\,dt$$

On suppose à l'instant t_0=0s, v_0=0m/s et x_0=0m.

$$v(t) = t^2 - t$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{0}^{x(t)} dx = \int_{0}^{t} v(t)dt = \int_{0}^{t} (t^2 - t)dt$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$$

- **Le mouvement rectiligne sinusoïdal**

L'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal s'écrit sous la forme sinusoïdale en fonction du cosinus ou sinus tel que :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

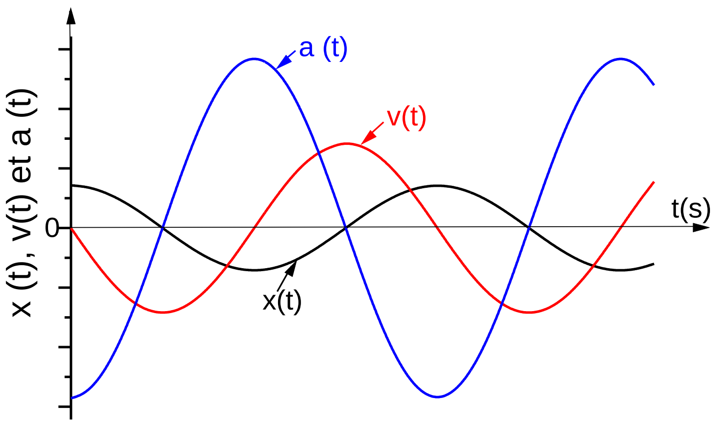
x_m est l'amplitude maximale
ω est la pulsation du mouvement
φ est la phase initiale et elle est déterminée par les conditions initiales
La vitesse est la dérivée de x(t) tel que:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_m\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse telle que :

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

- *<u>Diagramme du mouvement rectiligne sinusoïdal</u>* :



3.2. Le mouvement dans le plan

Si la trajectoire du mobile est dans le plan, nous étudions le mouvement suivant les coordonnées cartésiennes (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ou suivant les coordonnées polaires ($O, \overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}$)

- **Les coordonnées polaires**

On définit la base polaire par la base orthonormée ($\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}$) tel que :
$\overrightarrow{U_R}$: Vecteur unitaire suivant la direction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{U_\theta}$: Vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{U_R}$ en faisant une rotation de π/2 du vecteur $\overrightarrow{OM}$

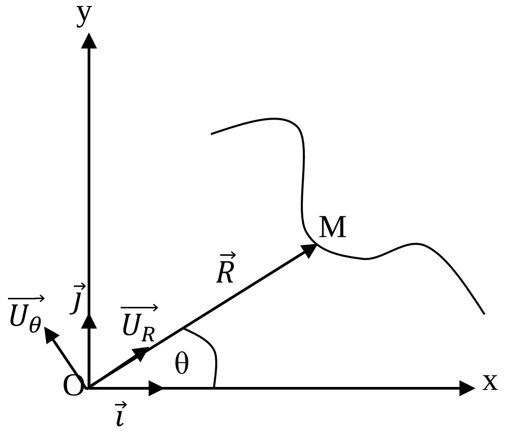


***Figure 9**: la base polaire* ($\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}$)

La base cartésienne est une base fixe alors que la base polaire est une base qui dépend du mobile M qui est en mouvement en fonction du temps.

Suivant les coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{R} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Suivant les coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R}$$

Les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (x, y) dans la base cartésienne alors que dans la base polaires les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (R, 0).

- <u>*Lien entre le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées polaires et vice versa :*</u>

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x},\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \text{ ou } \ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

La base polaire s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_R} = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

De même, la base cartésienne s'écrit en fonction de la base polaire comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{U_R} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\overrightarrow{U_R} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta} \end{cases}$$

- *Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées polaires*

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\,\overrightarrow{U_R})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{U_R} + r\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$$

La dérivée du vecteur $\overrightarrow{U_R}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}$$

C'est la règle de dérivation d'un vecteur unitaire tournant :

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui tourne par un angle θ est obtenue en multipliant la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ par le vecteur qui est directement perpendiculaire à $\vec{u}$ (rotation de π/2 dans le sens positif)

Exemples :

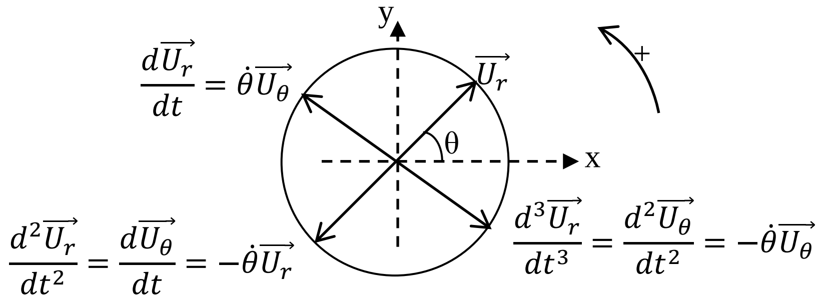


Figure 10 *: Dérivation successive par rapport au temps d'un vecteur unitaire*

Le vecteur vitesse suivant les coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_R} + R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} = \dot{R}\overrightarrow{U_{Rr}} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

- *Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées polaires*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\overrightarrow{U_R} + R\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta})$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{R}\overrightarrow{U_R} + \dot{R}\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt}\right) + (\dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt})$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_R} + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\overrightarrow{U_\theta}$$

- **Le mouvement curviligne**

Le mouvement curviligne est caractérisé par une trajectoire curviligne qui nécessite la connaissance du rayon de courbure R et le centre C (figure 10).

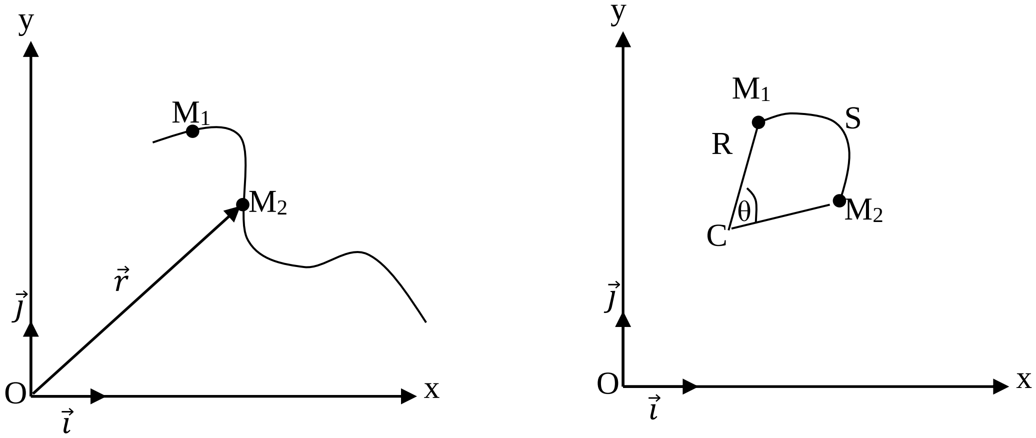


***Figure 11**: Mouvement curviligne*

La position du mobile est déterminée par l'abscisse curviligne S tel que :

$$S(t) = R\,\theta(t)$$

S est la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$. M_1 est la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 est la position du mobile à l'instant t_2.

- *Base de Frenet :*

La base de Frenet est une base reliée au mobile en mouvement curviligne. Elle est définit par la base orthonormé $(\overrightarrow{U_t}, \overrightarrow{U_n})$ tel que :
$\overrightarrow{U_t}$ est un vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire et en direction du mouvement ($\overrightarrow{U_t}$ est parallèle au vecteur vitesse $\vec{v}$)
$\overrightarrow{U_n}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{U_t}$ et il est dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{U_t} = \frac{dS}{dt}\overrightarrow{U_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + v\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + v\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_n}$$

D'autre part :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dS}{dt}\,\frac{1}{R} = \frac{v}{R}$$

D'où :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} \quad ; \quad \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}$$

$\overrightarrow{a_t}$ est l'accélération tangentielle et $\overrightarrow{a_n}$ est l'accélération normale.

Si $|\vec{v}|$ est constant donc l'accélération tangentielle a_t est nulle. On dit que le mouvement et curviligne uniforme : $\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}$

R est le rayon de courbure de la trajectoire qui est déterminé comme suit :

$$\vec{a} \times \vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}\right) \times v\,\overrightarrow{U_t}$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = \frac{v^3}{R}(\overrightarrow{U_n} \times \overrightarrow{U_t})$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \frac{v^3}{R}$$

D'où

$$R = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

- **Le mouvement circulaire**

Le mouvement circulaire est un mouvement dont la trajectoire est un cercle de rayon R constant. L'équation de la trajectoire est comme suit :

$$(x - x_0) + (y - y_0) = R^2$$

R est le rayon du cercle et (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre du cercle.
Le vecteur position s'écrit suivant les coordonnées polaires comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{U_R} + R\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

L'accélération est la somme de l'accélération tangentielle $a_\theta = R\,\ddot{\theta}$ et l'accélération normale $a_r = R\,\dot{\theta}^2$ qui s'écrient suivant la base de Frenet comme suit :

$$\overrightarrow{a_t} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_t}$$
$$\overrightarrow{a_n} = R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{U_n}$$

$\dot{\theta} = \omega$ est appelée la vitesse angulaire.

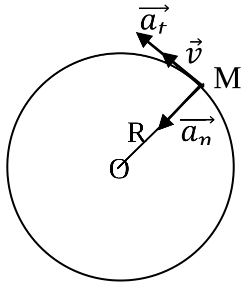


Figure 12: *Mouvement circulaire*

Si le module de la vitesse v ou la vitesse angulaire ω est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniforme. L'accélération dans ce cas est :

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = R\,\omega^2\,\overrightarrow{U_n}$$

On définit l'accélération angulaire par $\dot{\omega} = \alpha$. Si α est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniformément varié.

3.3. Le mouvement dans l'espace

- **Mouvement suivant les coordonnées cartésiennes**

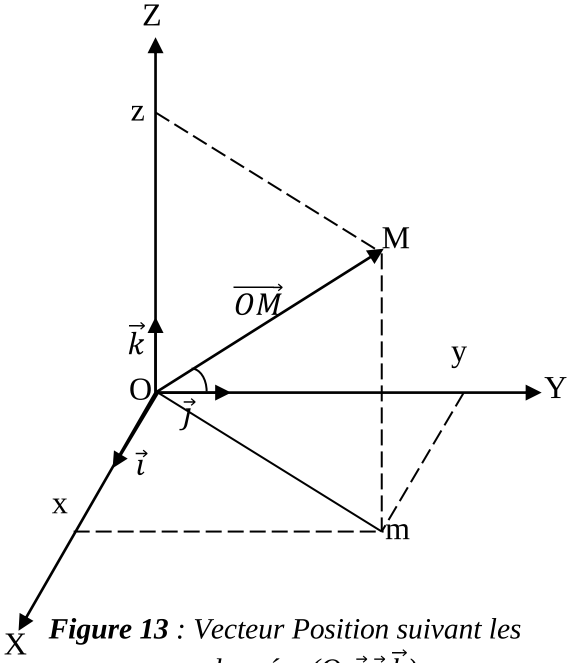


Figure 13 *: Vecteur Position suivant les coordonnées (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$)*

Les vecteurs : position vitesse et accélération s'écrient suivant les coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

- **Mouvement suivant les coordonnées cylindriques**

La base cylindrique est déterminée par les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$. Voir figure 13
Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit suivant les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\,\overrightarrow{U_r} + z\,\vec{k}$$

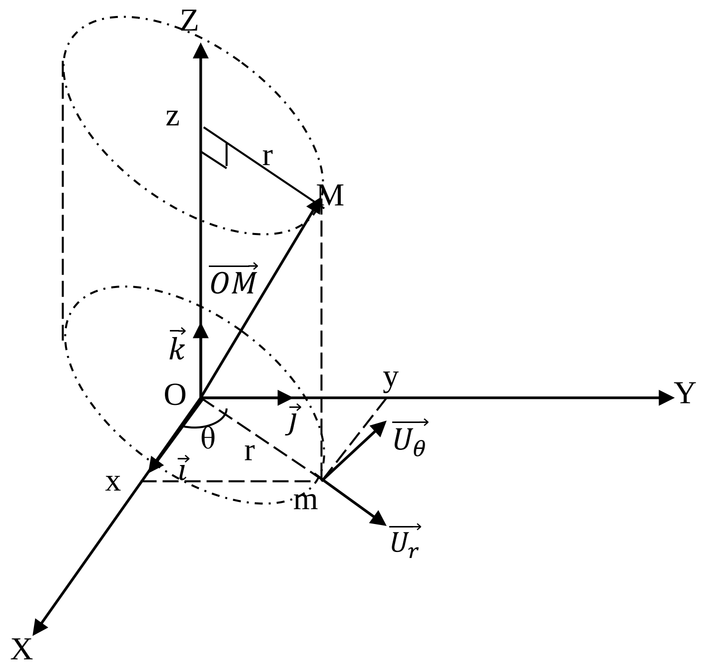


Figure 14 *: Vecteur Position suivant les coordonnées cylindriques (O,$\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k}$)*

- *Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes*

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \; donc \; \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La base cylindrique s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

- *Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées cylindriques*

$$\vec{v} = \frac{dOM}{dt} = \frac{d}{dt}(r\overrightarrow{U_r} + z\vec{k})$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Nous rappelons que :

$$\dot{\overrightarrow{U_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} \quad ; \quad \dot{\overrightarrow{U_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{U_r} \quad ; \quad \dot{\vec{k}} = 0$$

Donc le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

- *Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées cylindriques*

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k})$$
$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\overrightarrow{U_r} + \ddot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

- **Mouvement suivant les coordonnées sphériques**

La base sphérique est déterminée par les vecteurs unitaires ($\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi}$), tel que :
φ est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et l'axe Oz.
θ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{Om}$ et l'axe Ox. m est la projection de M dans le plan (O,x,y). Voir figure 14.

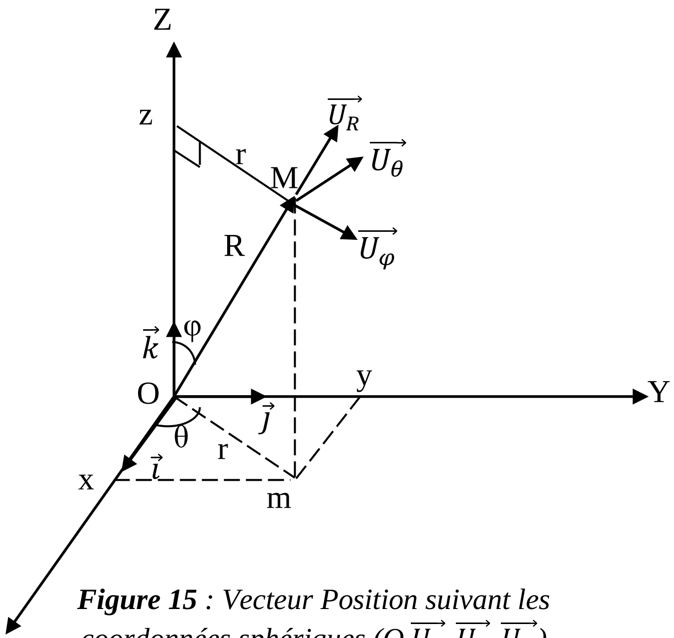


Figure 15 *: Vecteur Position suivant les coordonnées sphériques (O,$\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi}$)*

Un point mobile M est repéré par les coordonnées sphériques : (R, θ, φ) et le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R}$$

- *Lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Sachant que $r = R\sin\varphi$, donc :

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{R} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

- *Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques*

$$\begin{cases} r = R\sin\varphi \\ \theta = \theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \varphi = \arctan\dfrac{r}{z} \end{cases}$$

- *Base sphérique en fonction de la base cartésienne*

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

Avec $\overrightarrow{Om} = r\,\overrightarrow{U_r} = R\sin\varphi\ \overrightarrow{U_r}$

$\overrightarrow{mM} = z\,\vec{k} = R\cos\varphi\ \vec{k}$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = R\sin\varphi\ \overrightarrow{U_r} + R\cos\varphi\ \vec{k}$$

Nous savons que :

$$\overrightarrow{U_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = R\left[\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}\right] = R\,\overrightarrow{U_R}$$

D'où :

$$\overrightarrow{U_R} = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{U_\theta}$ en fonction de la base cartésienne, il suffit de tracer les vecteurs unitaires suivant le plan (o, x, y). Voir figure 15.

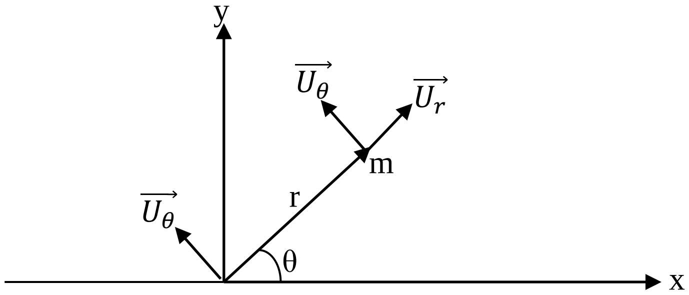


***Figure 16** : Projection du vecteur $\overrightarrow{U_\theta}$ suivant les coordonnées cartésienne*

$$\overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{U_\varphi}$, nous avons : $\overrightarrow{U_R} \times \overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_\varphi}$

$$\overrightarrow{U_\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{U_\varphi} = -\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \sin\varphi\,\vec{k}$$

- *Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées sphériques*

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\overrightarrow{U_R}\right) = \dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\overrightarrow{U_R}}$$

$$\dot{\overrightarrow{U_R}} = \frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \dot{\varphi}(\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{k}) + \dot{\theta}(-\sin\varphi\sin\theta\,i + \sin\varphi\cos\theta\,j)$$

$$\dot{\overrightarrow{U_R}} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_\varphi} + \dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta}$$

D'où :

$$\vec{v} = \dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta} + R\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

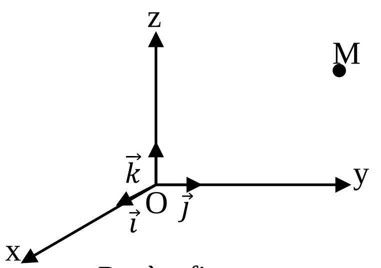
- *Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées sphériques*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta} + R\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_\varphi})$$

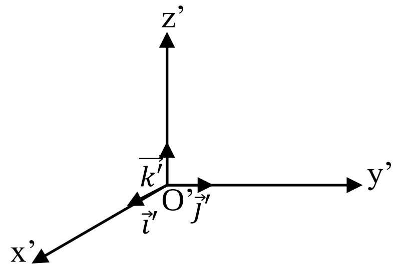
$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)\,\overrightarrow{U_R} + (R\ddot{\theta}\sin\varphi + 2\dot{R}\dot{\theta}\sin\varphi + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi)\,\overrightarrow{U_\theta}$$
$$+(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi)\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

4. Le mouvement relatif

Le mouvement est absolu s'il est étudié par rapport à un repère fixe par contre le mouvement est relatif s'il est étudié par rapport à un repère mobile.
Soit un point M en mouvement par rapport à un repère mobile R'(O', x', y', z') lui même en mouvement par rapport à un repère fixe R (O, x, y, z)



Repère fixe



Repère mobile

4.1. La position :

La position de M par rapport au repère fixe R est dite position absolue :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

La position relative est la position de M par rapport au repère mobile R' :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}$$

4.2. La vitesse :

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport au repère fixe R :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

D’autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

La vitesse absolue devient :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

La vitesse absolue est composée de la vitesse d’entrainement $\overrightarrow{v_e}$ et la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ tel que :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

La vitesse d’entrainement $\overrightarrow{v_e}$ est la vitesse du repère R’ par rapport au repère fixe R
La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ est la vitesse de M par rapport au repère mobile R’.

4.3. L’accélération

L’accélération absolue est l’accélération de M par rapport au repère fixe R :

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}\right] + 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}\right]$$

L’accélération est composée de l’accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l’accélération d’entrainement $\overrightarrow{a_e}$, et l’accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, tel que :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

Le mouvement du repère R’ peut être en translation ou en rotation par rapport au repère fixe R. La vitesse relative ne change pas mais la vitesse d’entrainement change et par conséquent l’accélération d’entrainement change et l’accélération de Coriolis change.

- *Cas d'un repère en mouvement de translation*

Le repère R' est en translation par rapport à R lorsque les vecteurs unitaires du repère R' ne changent pas au cours du temps et ils gardent le même sens et la même direction que le repère R : $\vec{i} = \vec{i'}, \vec{j} = \vec{j'}$ et $\vec{k} = \vec{k'}$

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{0}$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

L'accélération d'entrainement devient :

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Et l'accélération de Coriolis s'annule : $\vec{a_c} = \vec{0}$

Remarque :
L'accélération de Coriolis s'annule si le repère mobile R' est en translation par rapport au repère fixe R ou si le mobile M est fixe par rapport au repère mobile R'

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0$$

- *Cas d'un repère en mouvement de rotation sans translation*

On suppose que le repère R' est en rotation par rapport à l'axe z avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_{R'/R}} = \omega\vec{k}$ et on considère que $O \equiv O'$.
N'importe quel vecteur en rotation par rapport à un axe perpendiculaire sa dérivée dans le temps est le produit vectoriel de sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et vecteur tournant:

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i'} \; ; \; \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j'} \; ; \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k'}$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\vec{v_e} = x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v_e} = x'(\vec{\omega} \times \vec{i'}) + y'(\vec{\omega} \times \vec{j'}) + z'(\vec{\omega} \times \vec{k'})$$

$$\vec{v_e} = (\vec{\omega} \times x'\vec{i'}) + (\vec{\omega} \times y'\vec{j'}) + (\vec{\omega} \times z'\vec{k'})$$

$$\vec{v_e} = \vec{\omega} \times (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$$

$$\vec{v_e} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$$

Pour l'accélération d'entrainement :
Nous avons :

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i'}$$

D'où :

$$\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{\imath'}\right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt})$$

$$\overrightarrow{a_e} = x' \frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y' \frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z' \frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_e} = x' \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{\imath'}\right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt})\right] + y' \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{\jmath'}\right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt})\right] + z' \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{k'}\right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})\right]$$

$$\overrightarrow{a_e} = \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times x'\overrightarrow{\imath'}\right) + (\vec{\omega} \times x' \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt})\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times y'\overrightarrow{\jmath'}\right) + (\vec{\omega} \times y' \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt})\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times z'\overrightarrow{k'}\right) + (\vec{\omega} \times z' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})\right]$$

$$\overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right)\right)$$

Pour l'accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{\imath'}\right) + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{\jmath'}\right) + \frac{dz'}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{k'}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\omega} \times \left[\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\,(\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_r})$$

III. Dynamique du point matériel

1. Introduction

Nous avons étudié dans le chapitre précédent le mouvement des corps sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement et ce qu'on a appelé la cinématique du point matériel. Dans ce chapitre on s'intéresse à la dynamique du point c'est-à-dire nous étudions les causes du mouvement et repérer le mouvement pour des causes données. La question qui se pose est : Qu'est ce qui fait bouger une particule ou un point matériel ? Pour répondre à cette question nous introduisons la notion de force.

2. Notion de force

Un point matériel est en mouvement à cause des interactions entre la particule et son environnement qui les subits. Ces interactions sont appelées forces. Ces forces dépendent de la nature de la particule et de la nature de son environnement.
La force est représentée par un vecteur, tel que :

- Son Origine est le point de contact (force/corps)
- Sa direction: est la direction du mouvement supportée sur le fil pour le cas par exemple de la force : tension du fil
- Sont module : est la valeur de la force en Newton (N)

Les forces exercées sur un corps quelconque est la somme vectorielle de toutes les forces qui lui sont appliquées.

2.1. Différentes forces

- Forces de poids : force de gravitation due à a masse du corps. $\vec{P} = m\ \vec{g}$
- Forces de contacts : forces d'interactions entre deux corps en contact et lorsque les deux corps sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre on aura une force de frottement c'est une force qui s'oppose toujours au mouvement du corps considéré.
- Forces de tension : ce sont les forces qui tirent sur un élément d'un corps : tension du fil, tension du ressort
- Autres forces : forces électriques, forces magnétiques,…

Exemple : un corps glisse sur une surface horizontale par un fil (figure). Les forces exercées sur ce corps sont : force de poids, tension du fil, force de réaction et la force de frottement

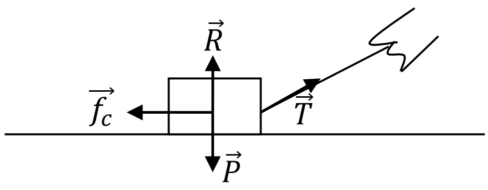


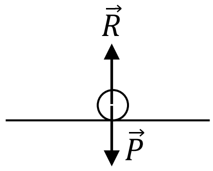
Figure 16 : force exercées sur un corps

3. Principe d'inertie

Enoncé : un corps isolé mécaniquement (un corps dont la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle $\sum \vec{F} = \vec{0}$ reste au repos s'il est initialement au repos ou il garde son mouvement rectiligne uniforme ($\vec{a} = \vec{0}$) tant que la résultante des forces est nulle et ceci par rapport à un repère ou référentiel d'inertie.

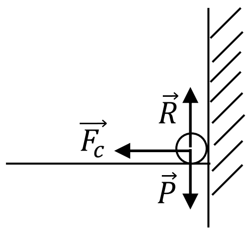
Exemple :
On jette une balle sur le sol et on étudie son mouvement sans prendre en compte les forces de frottements. On remarque que la balle est en mouvement rectiligne uniforme. Si on étudie les forces exercées sur la balle, nous avons :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$



Si la balle touche un mur (reçois un obstacle), la balle est soumise à une autre force car son mouvement change. Dans ce cas on aura :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_c} \neq \vec{0}$$



La balle change de direction à cause de la force de contact de la balle avec le mur $\vec{F_c}$
D'autre part, si la balle est au repos, elle reste au repos si $\sum \vec{F} = \vec{0}$

- Référentiel d'inertie ou galiléen

Un référentiel d'inertie est un repère dans lequel le principe d'inertie est réalisé. C'est-à-dire il garde son inertie : il reste au repos s'il est repos et il garde son mouvement rectiligne uniforme tan que $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Le repère de la terre n'est pas réellement galiléen à cause de son mouvement orbital et son mouvement autour du soleil et de sa propre rotation autour de son axe. Mais dans la plus grande majorité des expériences, on le considère comme étant un repère galiléen car on fait des études avec des temps faibles.

<u>Exemple sur un référentiel non galiléen :</u>

Un corps est sur un plateau d'un camion en mouvement_rectiligne uniforme. Le corps est au repos si le camion garde son mouvement rectiligne uniforme.
Si le plateau est lisse et le camion fait un virage, le corps glisse.
Donc :
Le camion n'a pas conservé son mouvement rectiligne uniforme car il est devenu en mouvement curviligne (virage) et le corps n'a pas conservé son repos d'où le principe d'inertie n'est pas appliqué sur le camion.

4. Concept de masse

On sait tous que plus la masse d'un corps est grande, plus il est difficile de changer son vecteur vitesse ou changer son mouvement (sa direction).''Il est facile pour une personne de faire bouger une table que de faire bouger une armoire''.

La masse est une grandeur physique scalaire qui représente la quantité de la matière qui compose une particule et elle représente l'inertie du corps.

5. La quantité de mouvement

On a vu précédemment que le mouvement d'un corps peut être influencé par la masse du mobile. La quantité de mouvement est un vecteur qui est déterminé par le produit entre la masse et la vitesse. La quantité de mouvement nous permet de distinguer entre les particules en mouvement de même vitesse et de masses différentes.

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

On remarque que la direction du vecteur quantité de mouvement et comme la direction du vecteur vitesse.

Pour un système de N particules, la quantité de mouvement totale est :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P_i}$$

Si la quantité de mouvement change en fonction du temps, on définit ce qu'on appelle l'impulsion : $d\vec{P}$

6. Les lois de Newton

Les lois de Newton sont postulés sont démonstration mais en accord avec les expériences (ils sont valables dans n'importe quel système galiléen)

- <u>$1^{\text{ière}}$ lois de newton :</u> Le principe d'inertie

Si un objet isolé et au repos ou en mouvement rectiligne uniforme alors $\sum \vec{F} = \vec{0}$

- <u>$2^{\text{ième}}$ lois de Newton :</u> La relation fondamentale de la dynamique.

La résultante des forces exercées sur un corps est la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \frac{d}{dt} m\,\vec{v}$$

Si la masse est constante,

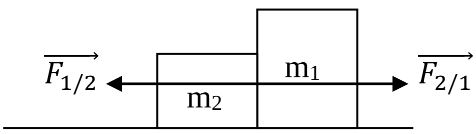
$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = m\ \vec{a}$$

Cette relation associe le terme cinétique qui est l'accélération et le terme dynamique qui est les forces exercées donc si on connait les forces (la résultante des forces) on peut déterminer la nature du mouvement d'un point matériel donné.

- <u>$3^{\text{ième}}$ lois de Newton :</u> Principe d'action et de la réaction

Lorsque deux corps sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées en sens mais égale en intensité.



$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\,\overrightarrow{F_{2/1}}$$

<u>Remarque :</u>

La force exercée sur un corps est appelée action et la force exercée sur l'autre corps est appelée réaction.
Toute force est associée à une réaction.
Les forces sont de même nature. Il ne faut pas confondre avec la force du pois et la force de réaction (ces deux forces ne sont pas de même nature).

➢ <u>Loi de gravitation universelle</u> :

Cette loi nous permet de déterminer l'intensité des forces : $F_{1/2}=F_{2/1}=F_g$.

On considère deux particules matérielles de masses m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre (figure 17).

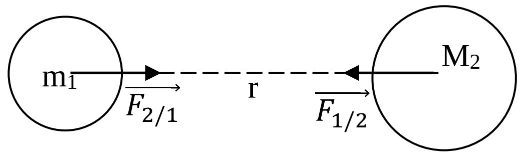


***Figure 17** : forces d'action et réactions*

La force d'attraction (action ou réaction) entre ces deux particules est :

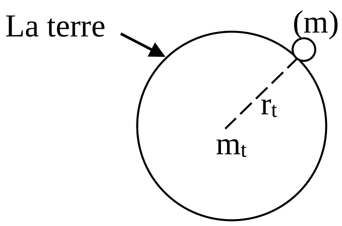
$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Avec G = 6.726 .10^{-11} N m^2/kg^2 est la constante de gravitation universelle

La loi de gravitation obéit au principe de superposition : s'il y plus de deux corps, il faut considérer la présence de toutes les forces d'attraction exercées sur les corps.

➢ <u>Champs gravitationnel</u>

<u>À la surface de la terre :</u>



m_t et r_t sont la masse et le rayon de la terre respectivement tel que : $m_t = 5.98.\ 10^{24}$ kg et $r_t = 6.37.10^6$ m

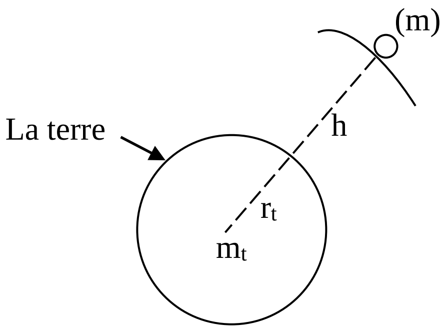
$$F_g = m\,g = G\frac{m\,m_t}{r_t^2}$$

La gravitation g est :

$$g = G\frac{m_t}{r_t^2}$$

Application numérique : g = 9.8 N/kg

<u>À une hauteur h de la terre</u>



$$F_{g'} = m\ g' = G\frac{m\ m_t}{r^2}$$

Tel que $r = r_t + h$
D'où :

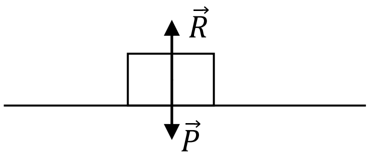
$$g' = g\frac{r_t^2}{r^2}$$

7. Forces de liaison ou forces de contact

La force de contact est toute force qui a lieu une fois on a le contact entre deux surfaces planes.

7.1. Réaction d'un support

On considère un corps solide posé sur une surface horizontale.



La force de réaction $\vec{R}$ est l'action du support sur lequel repose le système et qui l'empêche de s'enfoncer vers le bas sous l'action de son poids.

7.2. Forces de frottement

On distingue les forces de frottements solide, fluide et les forces de frottements statiques et dynamiques :

- <u>Forces de frottement statiques</u>

<u>Exemple :</u> soit les forces exercées sur un corps : $\vec{F}, \vec{R}, \vec{P}$ et la force de frottement statique $\vec{F_s}$ (figure 18). La force de frottement est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface plane. Dans le cas statique, le corps est au repos.

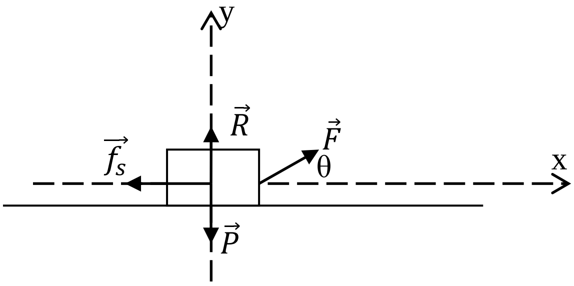


Figure 18 : force exercées sur un corps

Corps au repos : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

La projection sur les axes (ox) et (oy) donne :

$$F \cos\theta - f_s = 0$$
$$f \ sin\ \theta + R - P = 0$$

Donc

$$f_s = F \cos\theta$$
$$R = P - F \sin\theta$$

Tout juste avant d'arracher le corps, la force statique atteint sa valeur maximale tel que :

$$f_s = \ \mu_s \, R$$

Avec μ_s est le coefficient de frottement statique
R est la force de réaction et elle représente la composante normale de la force de contact.

$$f_{smax} = \ \mu_s \, R = \mu_s \ (P - F \sin\theta)$$

➢ Forces de frottement dynamique

Dans ce cas, le corps est en mouvement. On prend toujours l'exemple précédent.
Dans ce cas la force de frottement cinétique devient :

$$f_c = \ \mu_c \, R$$

$f_c$et μ_c sont respectivement la force de frottement le coefficient de frottement cinétique.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, nous avons : $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$
La projection sur les axes (ox) et (oy) donne :

$$F \cos\theta - f_c = m\,a$$
$$R = P - F \sin\theta$$

Exemple :

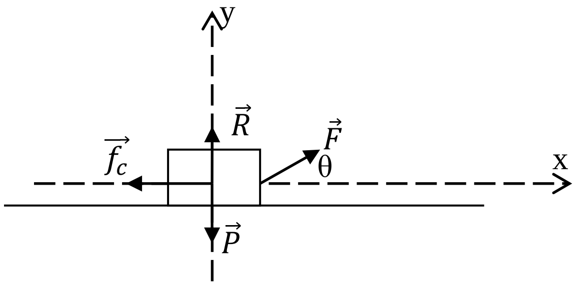


Figure 18 : force exercées sur un corps

On donne : θ = 45°, g=9.8 m/s², $\mu_c = 0.15$ et F = 20 N

Trouver la force de frottement cinétique et en déduire l'accélération ?

$$\sum \vec{F} = \vec{f_c} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$f_c = \mu_c\, R$$

D'autre part : la projection sur (oy) nous donne:

$$R = P - F\sin\theta$$

D'où

$$f_c = \mu_c\,(P - F\sin\theta)$$

Application numérique :

$$f_c = 12.87\ N$$

En projetant les forces sur (ox) :

$$a = \frac{F\cos\theta - f_c}{m}$$

Application numérique :

$$a = 0.12\ m/s^2$$

- Forces de frottement dans les fluides

Quand un corps solide se déplace dans un fluide (un gaz ou liquide) avec une faible vitesse relative, la force de frottement est :

$$\vec{f_f} = -K\,n\,\vec{v}$$

K est le coefficient qui dépend de la forme du corps solide en mouvement.
n est le coefficient de viscosité

8. Forces élastiques

La force élastique provoque un mouvement périodique sinusoïdal tel que :

$$\vec{a} = -\omega^2 \, \overrightarrow{OM}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

La force élastique d'écrit :

$$\vec{F} = -m\omega^2 \, \overrightarrow{OM}$$

Posant $k = m\omega^2$la constante de raideur
Donc :

$$\vec{F} = -k \, \overrightarrow{OM}$$

La résultante de toute force d'un point matériel en mouvement rectiligne sinusoïdal est proportionnelle au vecteur position et de sens contraire :

$$F = -k\,x$$

9. Forces d'inertie ou pseudo forces

Dans ce cas nous étudions la dynamique du point par rapport à un repère non-galiléen.

On sait que pour un repère galiléen :

$$\vec{F} = m\,\overrightarrow{a_a} = m\,\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\overrightarrow{a_a}$ et $\overrightarrow{v_a}$ sont l'accélération et la vitesse absolues.
Pour un repère non galiléen (relatif) :

$$\vec{F} = m\,\overrightarrow{a_r} = m\,\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}$$

$\overrightarrow{a_r}$ et $\overrightarrow{v_r}$ sont l'accélération est la vitesse relatives tel que :

$$\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_a} - \overrightarrow{a_e} - \overrightarrow{a_c}$$

$\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{a_c}$ sont l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis respectivement.

D'où :

$$m\,(\overrightarrow{a_a} - \overrightarrow{a_e} - \overrightarrow{a_c}) = m\,\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}$$

$$m\,\overrightarrow{a_a} = m\,\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} + m\overrightarrow{a_e} + m\overrightarrow{a_c}$$

D'où

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_c}$$

Avec : $\overrightarrow{F_e} = m\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{F_c} = m\overrightarrow{a_c}$

La loi de la dynamique peut être appliquée dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter la force d'entrainement et la force de Coriolis.

10. Moment cinétique

Soit une particule de masse m se trouvant en un point repéré par le vecteur $\vec{r}$ et se déplace à la vitesse $\vec{v}$. Le moment cinétique d'une particule est :

$$\overrightarrow{L_{/O}} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$\vec{P}$ est la quantité de mouvement ; $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur position
$\overrightarrow{L_{/O}}$ est un vecteur perpendiculaire au plan $(\vec{r}, \vec{P})$
Son module est :

$$L_{/O} = r.P\,.\sin(\vec{r}, \vec{P})$$

Si le mouvement est circulaire de rayon r, on aura : $\vec{r}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$

$$\overrightarrow{L_{/O}} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$
$$L_{/O} = m.r.v$$

Posant : $v = \omega\, r$

$$L_{/O} = m.r^2.\omega$$

Le vecteur $\overrightarrow{L_{/O}}$ a le même sens que le vecteur vitesse angulaire. On peut écrire :

$$L_{/O} = m.r^2.\vec{\omega}$$

- <u>Théorème du moment cinétique :</u>

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égale au moment de la force qui lui est appliquée par rapport au point de référence utilisé par le moment.

<u>Démonstration :</u>

$$\frac{d\overrightarrow{L_{/O}}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{P})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} = \vec{v} \times m\,\vec{v} = \vec{0}$$

Par le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures appliquées

On définit le moment d'une force par rapport à l'origine O par :

$$\overrightarrow{\tau_{/O}}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

D'où :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{/O}}}{dt} = \overrightarrow{\tau_{/O}}(\vec{F})$$

11. Conservation du moment cinétique –forces centrales

Une force centrale est la force est la force qui à chaque instant, la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O.

La dérivée du moment cinétique s'annule si :

a. La particule est isolée : $\vec{F} = \vec{0}$ ce qui signifie que le moment cinétique d'une particule libre est constant.
b. Si la force $\vec{F}$ est centrale : $\vec{F}$ est parallèle à $\vec{r}$. Donc le moment cinétique par rapport au centre de forces est constant. Le contraire est vrai c'est à dire si le moment cinétique est constant donc la force est centrale.

Exercices corrigés

Exercice 1 :

Soit un vecteur $\vec{A} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ suivant les coordonnées cartésiennes. Convertir ce vecteur en coordonnées polaire ?

Solutions :

Les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires s'écrivent :

$$\vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{U_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$
$$\vec{\jmath} = \sin\theta\,\overrightarrow{U_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} = 2\left(\cos\theta\,\overrightarrow{U_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta}\right) - 3\,(\sin\theta\,\overrightarrow{U_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}\,)$$

$$\vec{A} = (2\cos\theta + 3\sin\theta\,)\overrightarrow{U_r} - \ (2\sin\theta \ \ + 3\ \cos\theta\,)\,\overrightarrow{U_\theta}$$

Exercice 2 :

Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, un point M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = (1+\cos t)\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$$

1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M ?
2)- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module
3)- En déduire la nature du mouvement et déterminer la vitesse angulaire ω ?
4)- Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminer son module. Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi?
5)- Déterminer l'angle α que fait l'accélération avec la vitesse ?
6)- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires ?

Solution :
1)- Nature de la trajectoire :

$$x = 1 + \cos t$$
$$y = \sin t$$

D'où

$$(x-1)^2 = \cos t^2 \ldots.(1)$$
$$y^2 = \sin t^2 \ldots.(2)$$

(1)+(2) nous donne : $(x-1)^2 + y^2 = 1$
La trajectoire est un cercle de rayon R = 1m et de centre (1,0)
2)- Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse est : v = 1m/s

3)- La nature du mouvement :

La vitesse est constante donc le mouvement est circulaire uniforme.
La vitesse angulaire ω est constante

$$\omega = \frac{v}{R} = 1\ rad/s$$

4)- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{\imath} - \sin t\,\vec{\jmath}$$

Le module de l'accélération est : 1 m/s^2
Cette accélération représente l'accélération normale a_N dans le repère de Frenet car le mouvement est circulaire uniforme : l'accélération tangentielle est nulle a_t=0m/s^2

5)- L'angle α entre l'accélération et la vitesse :

Par le produit scalaire ou par le produit vectoriel :

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\cos \mathrm{t}^2 \quad (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \times +\cos t \sin t\,(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + \sin \mathrm{t}^2\ (\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) - \sin t\,(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath})$$
$$\vec{a} \times \vec{v} = -\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = 1$$

D'autre part :

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a.v.\sin(\vec{a}, \vec{v}) = \sin(\vec{a}, \vec{v})$$
$$\alpha = \pi/2$$

6)- Vecteur vitesse et vecteur accélération en coordonnées polaire :

$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_r}$, R=1m est constant et θ = t

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\theta}\,R\,\overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_\theta}$$

Le module de la vitesse en coordonnées polaire v=1m/s

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\dot{\theta}\ \overrightarrow{U_r} = -\overrightarrow{U_r}$$

D'où a=1m/s^2

<u>Exercice 3</u> :

Soit un mobile M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = 3\ \cos 2t\,\vec{\imath} + 3\sin 2t\,\vec{\jmath} + (8t-4)\vec{k}$$

1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z) ?
2)- Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques et déterminer leur module?
3)- Trouver $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base de Frenet ?
4)- En déduire le rayon de courbure r ?

Solution :

1)- La nature de la trajectoire dans le plan (O, x, y) :

$$x=3\cos 2t$$
$$y=3\sin 2t$$

D'où

$$x^2=9(\cos 2t)^2$$
$$y^2=9(\sin 2t)^2$$

$$x^2+y^2=9$$

Le mouvement dans le plan (O, x, y) est circulaire de rayon R = 3m et de centre (0, 0)
Suivant l'axe Oz :

$$z = 8t-4$$

Équation d'une droite donc le mouvement est rectiligne suivant Oz
Donc le mouvement suivant l'espace (O, x, y, z) est hélicoïdal

2)- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques et déterminer leur module :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_r} + z\,\vec{k} = 3\,\overrightarrow{U_r} + (8t-4)\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 6\,\overrightarrow{U_\theta} + 8\,\vec{k}$$

v=10 m/s

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -12\,\overrightarrow{U_r}$$

a=12 m/s^2

3)- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base de Frenet :

$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{U_t} = 10\,\overrightarrow{U_t}$$
$$\vec{a} = a_t\,\overrightarrow{U_t} + a_n\,\overrightarrow{U_n}$$
$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} = \vec{0}$$

D'autre part, nous avons : $a^2 = a_t^2 + a_n^2$
D'où

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2$$
$$\overrightarrow{a_n} = 12\,\overrightarrow{U_n}$$

4)- Le rayon de courbure r :

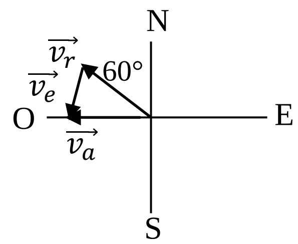
$$a_n = \frac{v^2}{r}$$
$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{100}{12} = 8.33\ m$$

Exercice 4 :

Un bateau prend la mer en direction du nord-ouest (60°) à la vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. Le mouvement du bateau par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h.

- Calculer la vitesse et la direction du courant ?

Solution



$$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$$

$$\vec{v_e} = \vec{v_a} - \vec{v_r}$$

$$v_e = {v_a}^2 + {v_r}^2 - 2\, v_a\, v_r \cos 30°$$

$$v_e = 2.52\ km/h$$

Sa direction :
Il faut trouver l'angle α entre $\vec{v_a}$ et $\vec{v_e}$:

$$\frac{v_r}{\sin \alpha} = \frac{v_e}{\sin 30}$$

$$\sin \alpha = \frac{v_r}{v_e} \sin 30$$

$$\alpha = 23.6°$$

Exercice 5 :

Soit un repère mobile R'(O', x', y', z') en mouvement de translation par rapport à un autre repère fixe R (O, x, y, z) avec une vitesse $\vec{v_e} = (1,0,0)$ et R//R'. On suppose que les coordonnées de M par rapport à R' sont : $x'= 6t^2+3t$, $y'=-3t^2$, $z'=3$ et on suppose qu'à t=0s, les coordonnées de M par rapport à R sont O(0,0,0)

1. Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue ?
2. En déduire les coordonnées du point M par rapport à R ?
3. Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue ?

Solution :

1)- La vitesse relative et la vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{\imath'}$$

$$\overrightarrow{v_r} = (12t + 3)\overrightarrow{\imath'} - 6t\,\overrightarrow{\jmath'}$$
$$\overrightarrow{v_a} = (12t + 4)\overrightarrow{\imath'} - 6t\,\overrightarrow{\jmath'}$$

R // R' donc :

$$\overrightarrow{v_a} = (12t + 4)\vec{\imath} - 6t\,\vec{\jmath}$$

2)- Les coordonnées du point M par rapport à R

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\int d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \overrightarrow{v_a}\,dt$$

$$x = 6t^2 + 4t + c_1$$
$$y = -3t^2 + c_2$$
$$z = c_3$$

À l'instant t=0s, x=y=z=0 donc $c_1=c_2=c_3=0$

3)- L'expression de l'accélération relative et absolue

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = 12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = 12\,\overrightarrow{\imath'} - 6\overrightarrow{\jmath'}$$

Exercice 6 :

Un corps de poids égale à 8N, posé sur un plan rugueux incliné d'angle θ = 35°. Le coefficient de frottement cinétique est 0.40. On prend g =10m/s^2.

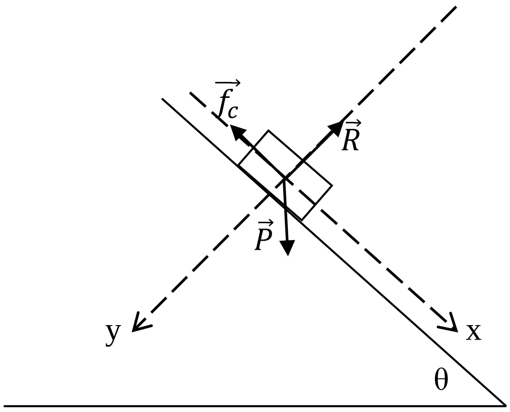
1)- Trouver l'angle d'inclinaison pour que le corps glisse avec une vitesse constante ?

2)- Quelle set la force normale pour un angle d'inclinaison de θ = 35° ?

3)- Quelle est la force de frottement pour un angle d'inclinaison de θ = 35° ?

4)- Quelle est l'accélération pour un angle d'inclinaison de θ = 35° ?

Solution :



1)- L'angle d'inclinaison pour que le corps glisse avec une vitesse constante :

Pour que la vitesse soit constante, il faut que la somme des forces soit nulle

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f_c} = \vec{0}$$

La projection suivant (ox) et (oy) nous donne :

$$m\ g \sin\theta = f_c$$

$$m\ g \cos\theta = R$$

Nous avons :

$$f_c = \mu_c R$$
$$\tan\theta = \ \mu_c$$
$$\theta = 21.8\ °$$

2)- La force normale pour un angle d'inclinaison de θ = 35° :

$$R = m\ g \cos\theta$$

R= 6.55 N

3)- La force de frottement pour un angle d'inclinaison de θ = 35° :

$$f_c = \mu_c R$$

$$f_c = 2.62\ N$$

4)- L'accélération pour un angle d'inclinaison de θ = 35° :

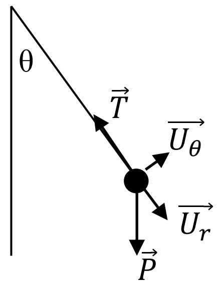
$$m\ g \sin\theta - f_c = m\ a$$

$$a = \frac{m\ g \sin\theta - f_c}{m} = 2.46\ N$$

Exercice 7 :

On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l. On repère la position de la masse m par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :
1)- Le principe fondamental de la dynamique (utiliser le système des coordonnées polaires).
2)- Le théorème du moment cinétique.

Solution :



Les forces appliquées sont : tension du fil et le poids.

1)- En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

L'accélération dans les coordonnées polaires d'écrit :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta}$$

Dans ce cas, nous avons : r = l
Donc

$$\vec{a} = \left(l\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(l\,\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta}$$

Projection sur $\overrightarrow{U_r}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ nous donne :

$$-T + mg\cos\theta = -ml\dot{\theta}^2$$

$$-mgl\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

D'où

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

2)- En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}(\vec{F})$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \times m\,\vec{v}$$

La vitesse en coordonnées polaire est :

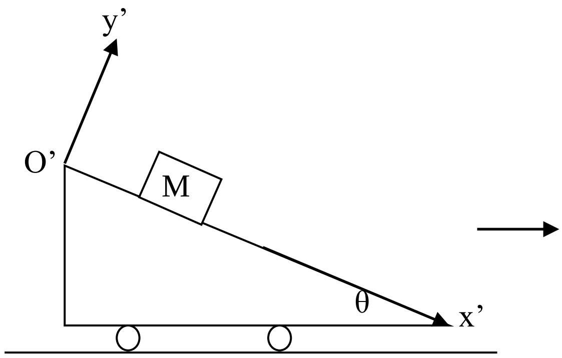
$$\vec{v} = l\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$
$$\vec{L} = l\,\overrightarrow{U_r} + m\,l\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} = m\,l^2\dot{\theta}\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\,l^2\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

Le moment des forces est :

$$\vec{\tau}\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} = -m\,l\,g\sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{\tau}\left(\vec{T}\right) = \overrightarrow{OM} \times \vec{T} = \vec{0}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}\left(\vec{P}\right) + \vec{\tau}\left(\vec{T}\right)$$
$$m\,l^2\,\ddot{\theta} = -m\,l\,g\sin\theta$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

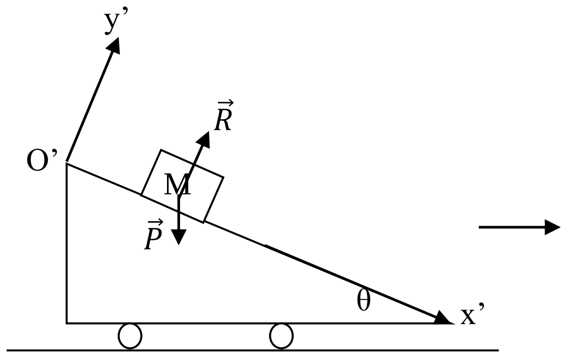
<u>Exercice 8</u> :

Chariot au repos, son toit O'A' est incliné de l'horizontale avec un angle θ. Il se déplace sur l'horizontale avec une accélération constante a0. On lâche sur le toit de ce chariot à partir du point O' une masse M sans vitesse initiale. On néglige les frottements et R' est le repère du chariot.



1)- Trouver l'accélération de la masse M par rapport au repère R' ?
2)- Déduire la vitesse de M dans le repère R' et la nature du mouvement ?
3)- Déterminer la réaction du toit sur la masse M ?

Solution :



1)- l'accélération de la masse M par rapport au repère R' :

Le principe fondamental de la dynamique pour le repère R' qui est mobile est :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_e} + \vec{F_c} = m\,\vec{a_r}$$

$\vec{F_e}$ est la force d'entrainement tel que :

$$\vec{F_e} = -m\,\vec{a_e} = -m\,\vec{a_0}$$

$\vec{F_c}$ est la force de Coriolis. Dans ce cas elle, est nulle.

$$\vec{P} + \vec{R} - m\,\vec{a_0} = m\,\vec{a_r}$$

On projette sur (Ox) :

$$m\,g\sin\theta - m\,a_0\cos\theta = m\,a_r$$

$$a_r = g\sin\theta - a_0\cos\theta$$

2)- La vitesse de M dans le repère R' et la nature du mouvement :

$$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt}$$

$$\int_0^{v_r} dv_r = \int_0^t a_r\,dt$$

$$v_r = g\sin\theta - a_0\cos\theta)\,t$$

Nature du mouvement :

$$v_r = \frac{dx'}{dt}$$

$$\int_0^{x\prime} dx' = \int_0^t v_r\,dt$$

$$x' = \frac{1}{2}(g\sin\theta - a_0\cos\theta)t^2$$

Le mouvement suivant O'A' est rectiligne uniformément variable.

3)- La réaction du toit sur la masse M :

On projette suivant (Oy) :

$$-P\cos\theta + R - m\,a_0\sin\theta = 0$$

$$R = P\cos\theta + m\,a_0\sin\theta$$

$$R = m(g\cos\theta + a_0\sin\theta)$$

Bibliographie

[1] Michel Henri et Nicolas Delorme, Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod, Paris, (2008).

[2] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie, (2013).

[3] JEAN-MARIE BRÉBEC, THIERRY DESMARAIS, MARC MÉNÉTRIER, Bruno NOËL, RÉGINE NOËL et Claude ORSINI, Mécanique, *1ière Année* Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, (2010).

[4] Lamria BENALLEGUE, Mohamed DEBIANE, Azeddine GOURARI, et Ammar MAHAMDIA, Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B., Alger, (2011).

[5] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de Physique Mécanique du Point, 2ième édition, Dunod, Paris, (1999-2007).